

LXXVIII Московская астрономическая олимпиада (2024 г.)

Теоретический тур. Решения и критерии оценивания

7 класс

Задача 1

Половина массы звёздного скопления находится в пределах $R_2 = 30$ световых лет от центра, а радиус всего скопления равен $R = 52$ пк. Определите концентрацию звёзд в единицах числа звёзд на кубический парсек в центральной и периферийной частях скопления, если его масса равна 2 млн масс Солнца, а все звёзды скопления одинаковые с массой $\frac{2}{3}$ массы Солнца. Во сколько раз отличаются эти концентрации?

Решение. Обозначим массу Солнца за M_\odot . Полное число звёзд в этом скоплении

$$2N = \frac{2\,000\,000M_\odot}{\frac{2}{3}M_\odot} = 3\,000\,000.$$

Поскольку все звёзды в скоплении одинаковые, то на внутреннюю и внешнюю части скопления приходится одинаковое число звёзд — по $N = 1\,500\,000$.

Объём внутренней части скопления равен $V_{\text{ц}} = \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{4}{3}\pi(30/3.26)^3 \approx 3260$ пк³. Здесь мы учли, что в 1 парсеке примерно 3.26 световых лет. Тогда концентрация звёзд во внутренней части скопления

$$n_{\text{ц}} = \frac{N}{V_{\text{ц}}} = \frac{1\,500\,000}{3260} \approx 460 \text{ пк}^{-3}$$

Объём всего скопления равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 52^3 \approx 589\,000$ пк³. Для того чтобы вычислить объём периферийной части скопления, надо вычесть из полученного объёма объём центральной части. Но он составляет около 1/180 части всего объёма скопления, и его неучёт на ответ повлияет мало. Поэтому концентрация звёзд в периферийной части

$$n_{\text{п}} = \frac{N}{V} = \frac{1\,500\,000}{589\,000} \approx 2.5 \text{ пк}^{-3}.$$

Получаем, что в центральной части скопления концентрация звёзд в 180 раз выше, чем в периферийной.

Критерии проверки

1. Число звёзд в каждой из частей скопления **2 балла**
2. Концентрация звёзд во внутренней части **3 балла**
Если нет перевода световых лет в парсеки, то ставится только 1 балл и последний пункт не оценивается.
3. Концентрация звёзд во внешней части **2 балла**
В пп. 2 и 3 за правильное вычисление объёма при неправильном ответе ставится по 1 баллу.
4. Правильное численное значение отношения концентраций **1 балл**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 2

В созвездии Щита (граничит с созвездиями Стрельца, Орла и Змеи) находится красивое рассеянное звёздное скопление M11 (Дикая утка). В какие месяцы стоит наблюдать это созвездие вечером после захода Солнца и до полуночи на широте Москвы? Ответ объясните.

Решение. Через созвездие Орла проходит небесный экватор. Следовательно, Дикая утка заходит за горизонт вблизи от точки запада. Примерно там же находится созвездие Стрельца. В полночь Солнце находится на небесном меридиане ниже точки севера. Значит, угловое расстояние от Солнца до Стрельца — около 90° . Солнце находится в Стрельце в конце декабря — начале января, следовательно, указанная ситуация происходит за четверть года до того, то есть в конце августа — начале сентября. Если учесть, что скопление всё-таки южнее небесного экватора, то начало сентября можно отбросить.

Из точно таких же соображений можем сделать вывод, что восходить около полуночи скопление будет в начале апреля.

Далее, заметим, что почти любое скопление — это не слишком яркий объект. В нём могут быть отдельные яркие звёзды, но чтобы увидеть тусклые звёзды скопления, потребуется тёмное небо. Во второй половине июня и самом начале июля, около дня летнего солнцестояния, Солнце погружается под горизонт не очень глубоко и ночи в Москве довольно светлые. Это явно неудачное время для наблюдения скоплений.

Кроме того, необходимо, чтобы скопление находилось над горизонтом хотя бы на 10° , чтобы поглощение света звёзд в атмосфере было не слишком сильным. Поэтому удачные условия видимости опять сокращаются.

Итого, вечером от после захода Солнца и до полуночи скопление можно наблюдать с конца апреля/ начала мая до середины июня и с июля до конца лета.

Замечание. Известно, что α Орла (Альтаир) входит в астеризм Летне-осенний треугольник. Возникает соблазн сказать, что раз треугольник летне-осенний, то и Дикую утку хорошо наблюдать летом и осенью. Как мы убедились, это не совсем так. Альтаир заметно севернее, поэтому его хорошо видно не только летом, но и осенью, а также и весной.

Критерии проверки

- | | |
|---|----------------|
| 1. Вывод о том, что скопление следует наблюдать летом | 4 балла |
| Ответ лето и осень на основе летне-осеннего треугольника – половина баллов за этот пункт. Если по Солнцу сделан вывод о том, что в начале сентября ещё можно наблюдать, то засчитывается полностью. | |
| 2. Вывод о том, что с середины весны время тоже подходящее | 2 балла |
| 3. Вывод о том, что в июне слишком яркое небо | 1 балл |
| 4. Замечено, что совсем низко над горизонтом скопление наблюдать плохо с соответствующим выводом про сокращение подходящего времени | 1 балл |

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(М. В. Силантьев)

Задача 3

В 2024 году каждый раз, когда Луна будет проходить мимо звезды Антарес (α Скорпиона), где-то на Земле можно будет наблюдать покрытие этой звезды Луной. Сколько таких событий может произойти в 2024 году? Может ли в каком-то месяце случиться больше одного такого покрытия? Если может, то в каком месяце? Первое такое событие в 2024 году произойдёт 8 января и будет видно в Америке. Сколько покрытий Антареса можно наблюдать на северном полюсе на тёмном небе?

Решение. Интервал времени, за который Луна совершает один оборот вокруг Земли относительно звёзд, называется сидерическим периодом. Он равен $T = 27.3$ сут. Значит, Луна будет покрывать Антарес каждые T суток. В календарном году помещается $365.25/T \approx 13.4$ сидерических периодов. Это значит, что можно будет наблюдать 14 покрытий Антареса. Поскольку календарных месяцев только 12, в двух из них покрытие будет наблюдаться дважды: в начале и в конце месяца.

Сразу заметим, что Антарес — звезда южная. Солнце проходит через созвездие Скорпиона зимой, когда на северном полюсе полярная ночь. Следовательно, с северного полюса покрытия не будут видны вообще.

Осталось перебрать все возможные даты покрытий и найти те, которые попадают в один месяц. Будем вести счёт дней по всемирному времени. Первое покрытие происходит 8 января. Оно видно днём (Солнце было в Скорпионе чуть более, чем за месяц до этой даты) в Америке. Значит, по всемирному времени уже вторая половина дня. Следующее — через 27.3 суток, то есть 4 или даже 5 февраля, ведь продолжительность сидерического периода целое число суток и ещё примерно треть. В феврале 2024 года 29 дней, поэтому покрытие придёт сначала на 3 марта, а затем на 30 марта. Мы нашли, что первый месяц, когда будет наблюдаться два покрытия — это март.

Продолжаем перебор. Следующие покрытия произойдут 26/27 апреля, 24 мая, 20 июня, 17/18 июля, 14 августа, 10 сентября, 7/8 октября, 4 ноября, 30 ноября, 27/28 декабря.

Получается, что два покрытия произойдут в ноябре, но надо принять во внимание, что мы довольно грубо вычисляли даты, а 30 ноября — это последний день месяца, и накопленная ошибка может заметно изменить ответ. Поэтому проведем вычисления более аккуратно. До предпоследнего в году покрытия пройдёт 12 сидерических месяцев, а точнее, $13 \cdot 27.32 = 327.84$ суток. 327-й день после 8 января — это 30 ноября. Но если учесть, что должны пройти ещё почти сутки, а 8 января покрытие было по всемирному времени во второй половине дня, то уже настанет 1 декабря. Если использовать местное время, а не всемирное, то почти везде на Земле настанет 1 декабря, кроме самых западных районов США и Канады.

Замечание. Если бы мы использовали вместо сидерического синодический период Луны (29.5 сут), то получили бы только 13 покрытий и 2 покрытия в августе.

Критерии проверки

1. На северном полюсе покрытия Антареса не наблюдаются **1 балл**
2. Обоснованное указание на то, что произойдёт 14 покрытий **4 балла**

Если использован правильный период, но 13 покрытий, то 3 балла.

13 покрытий и синодический период — 2 балла.

12 покрытий и синодический период – 1 балл.

3. В марте два покрытия 1 балл
4. В ноябре или декабре два покрытия 1 балл
5. Замечено, что ответ ноябрь или декабрь не вполне однозначен 1 балл
Август при вычислении через синодический период – 1 балл.

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(В. Б. Игнатьев)

Задача 4

Космический корабль вышел на круговую орбиту радиусом 8000 км над экватором далёкой землеподобной экзопланеты, полностью закрытой облаками. Диаметр планеты по верхней кромке облаков составил 9700 км, а масса — $3 \cdot 10^{24}$ кг. На корабле установлен радар, который смотрит точно вниз и облучает короткими импульсами небольшие участки поверхности планеты точно под кораблём. Импульсы, отражаясь от поверхности, приходят на корабль через 22 мс с отклонениями до 60 мкс. Определите среднюю плотность планеты без учёта атмосферы, высоту верхней кромки облаков и высоту гор на планете.

Решение. Импульс, испущенный радаром, проходит расстояние от спутника до планеты, отражается и снова проходит то же расстояние до корабля. Значит, расстояние от радара до поверхности в среднем равно

$$L = \frac{ct}{2} = \frac{0.022 \text{ с} \cdot 300\,000 \text{ км/с}}{2} = 3300 \text{ км.}$$

Тогда можем определить радиус планеты: $R = r - L = 8000 - 3300 = 4700$ км. Отсюда получаем высоту верхней кромки облаков $H = \frac{9700}{2} - 4700 = 150$ км.

Плотность тела равна отношению его массы к объёму. Те участники, которые могут вычислить объём шара, без труда найдут плотность планеты:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3 \cdot 10^{24}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (4.7 \cdot 10^6)^3} \approx 6900 \text{ кг/м}^3.$$

Те же, кто не знают формулу для объёма шара, могут догадаться, что в неё обязательно входит радиус шара в кубе и ещё какой-то коэффициент. В справочных данных указана средняя плотность, масса и радиус Земли. Тогда мы можем записать следующее выражение:

$$\frac{\rho}{\rho_{\oplus}} = \frac{M}{M_{\oplus}} \cdot \left(\frac{R_{\oplus}}{R}\right)^3 = \frac{3 \cdot 10^{24}}{5.974 \cdot 10^{24}} \cdot \left(\frac{6370}{4700}\right)^3 \approx 1.25.$$

Домножая на плотность Земли ρ_{\oplus} , получаем тот же самый ответ.

Ответим на последний вопрос задачи. Отклонения во времени прихода импульсов показывают на сколько ближе или дальше от радара находился участок поверхности, облучаемый в текущий

момент времени. Если сигнал пришёл на 60 микросекунд раньше, значит, высоту горы он преодолел за 30 микросекунд, что в переводе на расстояние составляет $0.00003 \cdot 300000 = 9$ км.

Критерии проверки

- | | |
|--|----------------|
| 1. Определение расстояния до поверхности планеты | 2 балла |
| В случае ошибки этот и следующий этапы не засчитываются полностью, а максимальная оценка этапа 3 составляет 2 балла. | |
| 2. Определение радиуса планеты | 1 балл |
| 3. Плотность планеты | 3 балла |
| Если за радиус планеты принята высота облаков, то этот этап оценивается 1 баллом при правильном выполнении. | |
| 4. Высота облаков | 1 балл |
| 5. Высота гор | 1 балл |

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 5

Космический корабль опустился на поверхность одного из галилеевых спутников Юпитера и сделал снимок участка неба вблизи горизонта (см. отдельный лист).

1. Напишите собственные имена помеченных цифрами ярких звёзд.
2. На какой из спутников сел космический аппарат?
3. Как сместится Юпитер относительно горизонта через два часа после момента, когда была сделана фотография?
4. Спустя какое время фаза Юпитера станет равна 50%? Какая часть останется освещённой?

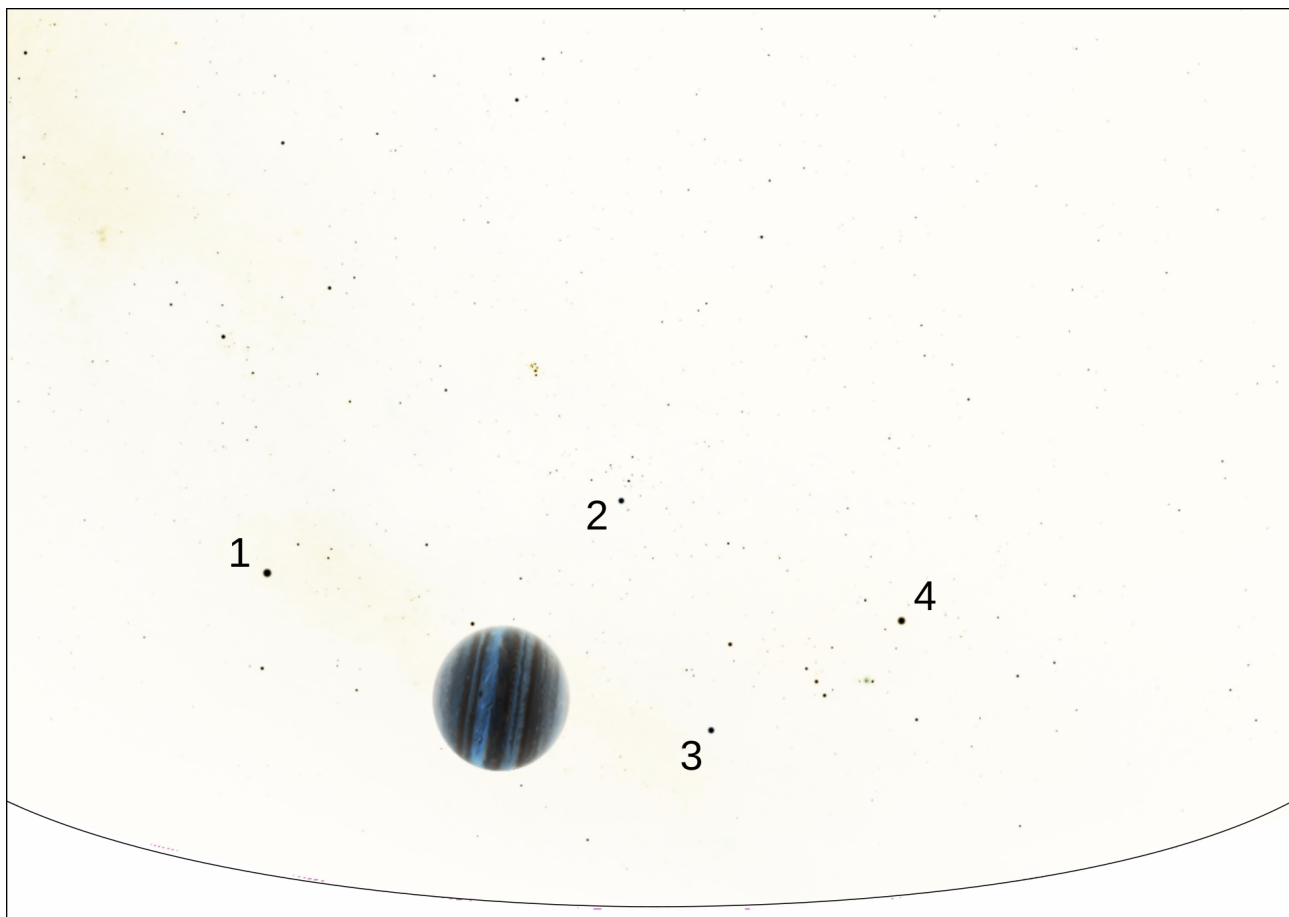
Характеристики галилеевых спутников

Название	Радиус орбиты, км	Орбитальный период, сут	Осевого период, сут	Радиус, км
Ио	421 800	1.769	1.769	1800
Европа	671 100	3.551	3.551	1560
Ганимед	1 070 400	7.155	7.155	2630
Каллисто	1 882 700	16.689	16.689	2410

Орбиты всех четырёх спутников круговые и лежат в плоскости экватора Юпитера. Юпитер: экваториальный радиус — 71 500 км, полярный радиус — 66 850 км.

Угловые расстояния между яркими звёздами:

Альдебаран — Беллатрикс	15.75°	Бетельгейзе — Капелла	39.5°
Бетельгейзе — Поллукс	33.25°	Кастор — Поллукс	4.5°
Ригель — Альдебаран	26.5°	Процион — Сириус	25.75°



Решение. Звезда 1 — Капелла, звезда 2 — Альдебаран, звезда 3 — Бетельгейзе, звезда 4 — Ригель.

Определим угол, под которым виден экваториальный диаметр Юпитера D_J со всех четырёх спутников. Если R — радиус орбиты спутника, то угловой диаметр в градусах равен $\delta = 57.3 \cdot D/R$. Тогда для Ио эта величина равна 19.4° , Европы — 12.2° , Ганимеда — 7.65° , Каллисто — 4.35° .

Теперь определим угловой размер Юпитера на рисунке. Для этого сравним его с известными расстояниями между звёздами. Из приведённых в справочных данных звёзд на рисунке можно найти Альдебаран, Беллатрикс, Бетельгейзе, Капеллу и Ригель. Аккуратно проведя измерения, получим угловой размер Юпитера около 12° , что означает, что космический корабль опустился на Европу.

Из равенства периода обращения галилеевых спутников вокруг Юпитера их осевым периодам следует, что эти спутники всегда обращены к Юпитеру одной стороной, подобно тому как Луна обращена всегда одной стороной к Земле. Следовательно, относительно горизонта спутника Юпитер не смещается.

В момент фотографирования виден полностью освещённый диск Юпитера. Значит, половину диска будет видно через четверть оборота спутника, т. е. через 0.89 сут или 21.3 часа.

Только две планеты солнечной системы вращаются в противоположную сторону относительно своего движения вокруг Солнца. Полосы Юпитера параллельны его экватору. Капелла (звезда 1) находится ближе к северному полюсу эклиптики, чем Бетельгейзе и Ригель (звёзды 3 и 4). Значит, северный полюс Юпитера смотрит налево. Спутник, облетая Юпитер, движется вверх, то есть постепенно начинает заглядывать на тёмную сторону сверху. Следовательно, освещённой останется нижняя часть планеты.

Критерии проверки

- | | |
|---|-------------------|
| 1. Правильные названия звёзд | по 1 баллу |
| 2. Определение углового диаметра Юпитера в диапазоне от 11° до 13° | 3 балла |
| При размере Юпитера от 10° до 11° или от 13° до 14° выставляется 2 балла. При ещё худшей точности измерений — 0 баллов. | |
| Если правильная величина получилась при неверном измерении, отождествлении звёзд и т. п., этот этап не засчитывается. | |
| 3. Определение углового размера Юпитера с галилеевых спутников | 1 балл |
| Альтернативный вариант — определение расстояния до Юпитера. | |
| 4. Правильный ответ на второй вопрос | 1 балл |
| Оценивается только при правильном выполнении этапов 2 и 3. | |
| 5. Вывод о том, что Юпитер никуда не сместится | 1 балл |
| 6. Время до фазы 50% | 1 балл |
| 7. Останется освещена нижняя часть Юпитера | 1 балл |

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Справочные данные

Данные о Солнце, Земле, Луне и Галактике

Светимость Солнца	$L_{\odot} = 3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
Видимая звёздная величина Солнца	$m_{\odot} = -26.78^{\text{m}}$
Абсолютная болометрическая звёздная величина Солнца	$M_{\odot} = 4.72^{\text{m}}$
Эффективная температура Солнца	$T_{\odot} = 5800 \text{ К}$
Солнечная постоянная	$E_{\odot} = 1360.8 \text{ Вт м}^{-2}$
Тропический год	$= 365.24219 \text{ сут}$
Звёздные сутки	$T_{\zeta} = 23 \text{ ч } 56 \text{ мин } 04 \text{ с}$
Наклон экватора к эклиптике	$\varepsilon = 23^{\circ} 26' 21.45''$
Средняя плотность Земли	$\rho_{\oplus} = 5515 \text{ кг/м}^3$
Синодический месяц	$S_{\zeta} = 29.530 59 \text{ сут}$
Видимая звёздная величина полной Луны	$m_{\zeta} = -12.7^{\text{m}}$
Число звёзд в нашей Галактике	$= 10 \cdot 10^{11}$
Радиус диска нашей Галактики	$= 20 \text{ кпк}$
Масса нашей Галактики (в массах Солнца)	$= 2 \cdot 10^{12}$

Астрономические и физические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$
Скорость света в вакууме	$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м с}^{-1}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг с}^{-3} \text{ К}^{-4}$
Масса протона	$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Астрономическая единица	$1 \text{ а. е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Парсек	$1 \text{ пк} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$

Характеристики Солнца, планет и некоторых спутников

Объект	Большая полуось, а.е.	Эксцентриситет	Орбитальный период	Масса, кг	Радиус, тыс. км	Осевого период
Солнце				1.989×10^{30}	696	25.38 сут
Меркурий	0.3871	0.2056	87.97 сут	3.302×10^{23}	2.44	58.65 сут
Венера	0.7233	0.0068	224.70 сут	4.869×10^{24}	6.05	243.02 сут
Земля	1	0.0167	365.26 сут	5.974×10^{24}	6.37	23.93 ч
Луна	0.002 57	0.0549	27.322 сут	7.348×10^{22}	1.74	27.32 сут
Марс	1.5237	0.0934	686.98 сут	6.419×10^{23}	3.40	24.62 ч
Юпитер	5.2028	0.0483	11.862 лет	1.899×10^{27}	69.9	9.92 ч
Сатурн	9.5388	0.0560	29.458 лет	5.685×10^{26}	60.3	10.66 ч
Уран	19.1914	0.0461	84.01 лет	8.683×10^{25}	25.6	17.24 ч
Нептун	30.0611	0.0097	164.79 лет	1.024×10^{26}	24.7	16.11 ч